Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas 3 (MA-1116)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Septiembre-Diciembre 2022

Tipo Único

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. **(Valor: 9 ptos.)** Dado el subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$H = \left\{(x,\, y,\, z,\, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + w = 0\right\}$$

determine una matriz A tal que si $\boldsymbol{v} \in V$, entonces $A\boldsymbol{v} = \text{Proj}_H(\boldsymbol{v})$, donde Proj_H es el operador de proyección ortogonal sobre H.

2. **(Valor: 5 ptos.)** Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos, y considere el siguiente producto interno sobre $\mathbb{P}_2$,

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p,\, q \in \mathbb{P}_2.$$

Halle el complemento ortogonal del subespacio H dado por

$$H = \text{gen}\left(\left\{1 - x + x^2,\, x + 3x^2\right\}\right).$$

3. **(Valor: 7 ptos.)** Considere la transformación $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ entre el espacio de funciones derivables y el de funciones continuas sobre $[0,1]$ dada por

$$(Tf)(x) = f'(x) + \int_0^x f(t)\, dt$$

   a) **(3 ptos.)** Demuestre que T es una transformación lineal.
   b) **(4 ptos.)** Sean $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = \cos(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Para cada una de estas funciones, determine si pertenece al núcleo de T.

4. **(Valor: 9 ptos.)** Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 2x \\ 0 & x-y \end{pmatrix}.$$

a) **(4 ptos.)** Determine la matriz asociada a T respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) **(5 ptos.)** Determine la matriz asociada a T respecto a las bases ordenadas

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathbb{R}^2$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ respectivamente.

5. **(Valor: 10 ptos.)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

halle una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.

Solución

1. Primero, observe que a partir de la definición de H es posible afirmar que

$$H = \text{gen}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\right)$$

y además, que

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{s}_1,\, \boldsymbol{s}_2,\, \boldsymbol{s}_3\}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

es una base para H, dado que los vectores son linealmente independientes. Ahora, para determinar el operador de proyección ortogonal sobre H tenemos al menos dos estrategias disponibles. La primera consiste en construir una base ortogonal para H a partir de este conjunto generador, y luego calcular la acción de Proj_H sobre los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ para determinar la matriz asociada A. La segunda estrategia consiste en aprovechar el hecho de que para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$,

$$\boldsymbol{v} = \text{Proj}_H(\boldsymbol{v}) + \text{Proj}_{H^\perp}(\boldsymbol{v})$$

y por tanto, si $A_\perp$ es la matriz asociada a $\text{Proj}_{H^\perp}$, entonces

$$A_\perp = I_4 - A, \quad \text{pues} \quad \text{Proj}_{H^\perp} = \boldsymbol{v} - \text{Proj}_H(\boldsymbol{v}).$$

Sin embargo, como

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim H + \dim H^\perp \quad \text{y por tanto} \quad \dim H^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim H = 1,$$

tenemos que $\text{Proj}_{H^\perp}$ es, en términos de cómputo, mucho más fácil de calcular. Así, solo sería necesario encontrar un único vector[1] $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\boldsymbol{k} \notin H$ y que además satisfaga[2]

$$\text{proj}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v} \in \text{gen}\left(\mathcal{S}\right).$$

A continuación exploramos ambas estrategias:

[1] Recuerde que $\dim H^\perp = 1$, así que ese único vector sería suficiente para construir una base para $H^\perp$

[2] Esta restricción es absolutamente esencial, puesto que una de las propiedades definitorias de $\text{Proj}_{H^\perp}(\boldsymbol{v})$ es que $\text{Proj}_{H^\perp}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, si $\boldsymbol{v} \notin H^\perp$. Si el vector $\boldsymbol{k}$ que encuentra no satisface esta propiedad, habrá creado un operador de proyección, pero no un operador de proyección *ortogonal*.

$a)$ **Primera estrategia:**
Empleando el procedimiento de Gram-Schmidt sobre los vectores de $\mathcal{S}$, se obtiene una base ortogonal para H dada por

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3\}$$

donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{s}_1, \\ \boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{s}_2 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_1}(\boldsymbol{s}_2), \\ \boldsymbol{b}_3 &= \boldsymbol{s}_3 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_1}(\boldsymbol{s}_3) - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_2}(\boldsymbol{s}_3). \end{aligned}$$

Así,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{v}) = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_1}(\boldsymbol{v}) + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_2}(\boldsymbol{v}) + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_3}(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4.$$

Luego, queda únicamente calcular la acción de Proj_H sobre los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y construir la matriz asociada a Proj_H. Efectuando cada una de las proyecciones necesarias,

$$\operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{e}_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

se obtiene finalmente que

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) **Segunda estrategia:**
Usando un poco de creatividad, podemos intuir que

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no puede ser escrito en términos de vectores de $\mathcal{S}$. Es posible verificar esto formalmente considerando el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Como puede observar, el sistema lineal es inconsistente y no posee solución alguna. Así, $\boldsymbol{k} \notin H$. Pero además, observe como

$$\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{s}_i \rangle = 0, \quad \boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S},$$

y por tanto $\boldsymbol{k} \in H^{\perp}$. Se sigue entonces que este único vector forma la base

$$\mathcal{B}_{\perp} = \{\boldsymbol{k}\}$$

de $H^{\perp}$. De aquí que

$$\operatorname{Proj}_{H^{\perp}}(\boldsymbol{v}) = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k} \rangle}{\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \rangle}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4.$$

Ahora, para determinar $A_{\perp}$ solo queda calcular la acción de $\operatorname{Proj}_{H^{\perp}}$ sobre la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Pero como

$$\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \rangle = \frac{1}{4}$$

y

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{k} \rangle = 1$$

para todo $\boldsymbol{e}_i$ de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, entonces

$$\operatorname{Proj}_{H^{\perp}}(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{4}\boldsymbol{k}, \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4,$$

y por consiguiente

$$A_{\perp} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$A = I_4 - A_\perp = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ambas estrategias nos permitieron llegar al mismo resultado final, pero la segunda estrategia fue notablemente más rápida. Sin embargo, esta requirió un poco de creatividad y en un examen parcial no es raro que los nervios nos traicionen. Parte de su preparación para el examen ha de ser conocer y explorar muy bien todos estos métodos alternativos, de forma que le sean útiles en momentos de presión.

2. Sean

$$s_1(x) = 1 - x + x^2, \quad s_2(x) = x + 3x^2, \quad s_1,\, s_2 \in \mathbb{P}_2.$$

A partir del conjunto generador dado en el enunciado, podemos construir una base ortogonal

$$\mathcal{B} = \{h_1,\, h_2\}, \quad h_1,\, h_2 \in \mathbb{P}_2$$

para H empleando el procedimiento de Gram-Schmidt. Así,

$$h_1 = s_1, \quad h_2(x) = s_2(x) - \left[\operatorname{proj}_{h_1}(s_2)\right](x) = -2 + 3x + x^2.$$

Una vez obtenida una base ortogonal para H, podemos determinar el complemento ortogonal de H construyendo Proj_H y analizando $\ker(\operatorname{Proj}_H)$ mediante la matriz asociada a Proj_H. Vea que

$$\operatorname{Proj}_H = \operatorname{proj}_{h_1} + \operatorname{proj}_{h_2},$$

y por tanto su matriz asociada A puede determinarse calculando la acción de Proj_H sobre la base canónica de $\mathbb{P}_2$, dada por

$$\mathcal{C} = \left\{1,\, x,\, x^2\right\} = \{e_1,\, e_2,\, e_3\}.$$

Efectuando cada una de las proyecciones,

$$\operatorname{Proj}_H(e_1) = e_1 - e_2 + e_3, \quad \operatorname{Proj}_H(e_2) = \frac{1}{4}(e_1 + 3e_3),$$

$$\operatorname{Proj}_H(e_3) = \frac{1}{4}(e_1 + 3e_3)$$

y de aquí que la matriz asociada a Proj_H (respecto a la base canónica de $\mathbb{P}_2$) resulta

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Usando esta representación matricial para Proj_H podemos determinar un conjunto generador para $H^{\perp}$, pues $H^{\perp} = \ker(\mathrm{Proj}_H)$. Así, considere el sistema lineal homogéneo dado por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicando operaciones elementales por fila, el sistema puede reducirse a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De esta manera,

$$\ker(A) = \mathrm{gen}\left(\{\boldsymbol{v}\}\right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Este vector de coordenadas en $\mathcal{C}$ corresponde al vector $x - x^2$ de $\mathbb{P}_2$, y finalmente obtenemos que

$$H^{\perp} = \mathrm{gen}\left(\left\{x - x^2\right\}\right).$$

Puede verificar brevemente que si $y(x) = x - x^2$, entonces

$$\langle y, h_1 \rangle = 0, \quad \text{y} \quad \langle y, h_2 \rangle = 0.$$

3. *a*) Para verificar que T es una transformación lineal tenemos a nuestra disposición al menos dos estrategias disponibles. La primera estrategia consiste en argumentar que como la derivada y la integración definida también son transformaciones lineales de $C^1([0,1])$, entonces la suma de estas dos transformaciones ha de ser también una transformación lineal. Por otro lado, la segunda estrategia consiste en verificar manualmente que

$$T(f+g) = T(f) + T(g), \quad \text{y} \quad T(kf) = kT(f),\ k \in \mathbb{R}.$$

A continuación exploramos ambos métodos.

1) **Primera estrategia:**
Sean $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ y $S : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ las transformaciones definidas según

$$Df = f', \quad (Sf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad f \in C^1([0,1]).$$

Es bien sabido que éstas son transformaciones lineales, pues ambas verifican las propiedades necesarias. Así, y como $T = D + S$, entonces en virtud de la linealidad de D y S, T también es una transformación lineal. En efecto, si $f,\, g \in C^1([0,1])$

$$T(f+g) = D(f+g) + S(f+g) = (Df + Sf) + (Dg + Sg) = Tf + Tg,$$

y también

$$T(kf) = D(kf) + S(kf) = k \cdot Df + k \cdot Sf = k(Df + Sf) = kTf.$$

donde $k \in \mathbb{R}$. Finalmente, se verifica que T es una transformación lineal.

2) **Segunda estrategia:**
Sean $f\, g \in C^1([0,1])$ y $k \in \mathbb{R}$. Vea que

$$\begin{aligned}
[T(f+g)](x) &= (f(x) + g(x))' + \int_0^x (f(t) + g(t))\, dt \\
&= \left(f'(x) + \int_0^x f(t)\, dt \right) + \left(g'(x) + \int_0^x g(t)\, dt \right) \\
&= (Tf)(x) + (Tg)(x).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
[T(kf)](x) &= (kf(x))' + \int_0^x kf(t)\, dt \\
&= kf'(x) + k \int_0^x f(t)\, dt \\
&= k \cdot (Tf)(x).
\end{aligned}$$

Así, T es una transformación lineal.

Ambas estrategias son esencialmente la misma, y ambas coinciden en su resultado.

b) Sean
$$g(x) = \sin(x), \quad h(x) = \cos(x), \quad g,\, h \in C^1([0,1]).$$
Calculando $T(g)$ y $T(h)$, vemos que

$$\begin{aligned}
T(g)(x) = \sin'(x) + \int_0^x \sin(t)\, dt &= \cos(x) + [-\cos(x) + \cos(0)] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

y

$$T(h)(x) = \cos'(x) + \int_0^x \cos(t)\,dt = -\sin(x) + [\sin(x) - \sin(0)]$$
$$= 0.$$

Por tanto, $g \notin \ker(T)$ mientras que $h \in \ker(T)$.

4. *a*) Sean

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_M = \{\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \boldsymbol{e}_{21}, \boldsymbol{e}_{22}\}$$

las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para determinar la matriz asociada a T respecto a estas bases canónicas, considere

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_{11} + 2\boldsymbol{e}_{12} + \boldsymbol{e}_{22},$$
$$T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_{11} - \boldsymbol{e}_{22}.$$

De aquí, podemos construir la matriz asociada directamente, pues

$$[T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}_M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Luego, si $[I]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ y $[I]_{\mathcal{C}_M,\mathcal{S}}$ son las matrices de cambio de base correspondientes, la representación que buscamos puede escribirse como

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = [I]_{\mathcal{C}_M,\mathcal{S}} \cdot [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}_M} \cdot [I]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

Así, solo quedan por determinar las matrices de cambio de base. Observe que como

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

la matriz de cambio de base $[I]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ es dada directamente por

$$[I]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, note que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_{11} + \boldsymbol{e}_{21} + \boldsymbol{e}_{22}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_{11} + \boldsymbol{e}_{22},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1\boldsymbol{e}_{11} + \boldsymbol{e}_{21} - \boldsymbol{e}_{22}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_{11} + \boldsymbol{e}_{12} + \boldsymbol{e}_{21} + \boldsymbol{e}_{22}.$$

y por ende, es posible escribir el cambio de base *inverso* a $[I]_{\mathcal{C}_M,\mathcal{S}}$ como

$$[I]_{\mathcal{S},\mathcal{C}_M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, $[I]_{\mathcal{C}_M,\mathcal{S}}$ es dada por la inversa de $[I]_{\mathcal{S},\mathcal{C}_M}$,

$$[I]_{\mathcal{C}_M,\mathcal{S}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, juntando todos los resultados anteriores,

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. En esencia, el enunciado pide determinar si A es diagonalizable y, en dado caso, encontrar su forma diagonal. Comencemos por calcular el polinomio característico de A, dado por

$$C_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix},$$
$$= (\lambda-2)^2(\lambda-3)^2.$$

Sean

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3,$$

los autovalores de A. Ahora, procedamos a determinar sus autoespacios planteando y reduciendo los sistemas lineales homogéneos correspondientes.

- E_{λ_1}
  Reduciendo el sistema dado por $\lambda_1 I_4 - A$, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  y de aquí que

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{gen}\left(\{\boldsymbol{\lambda}_{1,1},\, \boldsymbol{\lambda}_{1,2}\}\right), \quad \boldsymbol{\lambda}_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- E_{λ_2}
  De forma similar, reduciendo el sistema dado por $\lambda_2 I_4 - A$, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  Luego,

$$E_{\lambda_2} = \operatorname{gen}\left(\{\boldsymbol{\lambda}_{2,1},\, \boldsymbol{\lambda}_{2,2}\}\right), \quad \boldsymbol{\lambda}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Habiendo calculado los autoespacios, observe como $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = \dim \mathbb{R}^4$. Así, podemos afirmar que existe una base de autovectores de A para $\mathbb{R}^4$. Finalmente, A es diagonalizable y su forma diagonal respecto a

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\lambda}_{1,1},\, \boldsymbol{\lambda}_{1,2},\, \boldsymbol{\lambda}_{2,1},\, \boldsymbol{\lambda}_{2,2}\}$$

es dada por

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Samuel Alonso** para **GECOUSB**

Samuel Alonso
14-10028
Lic. en Física

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **alonso.smontenegro@gmail.com**